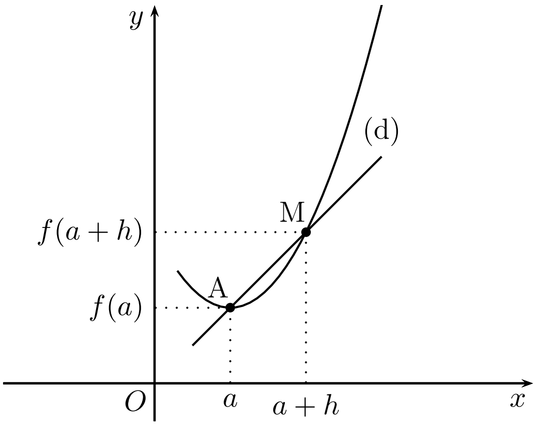
1 Rappel : Dérivabilité d'une fonction

1.1 Définition



Lorsque h tend vers 0, M se rapproche de A et la droite (d) se rapproche de la tangente à la courbe (C) représentant f au point A. Le coefficient directeur de (d) est $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$. La tangente en A à la courbe, si elle existe, a pour coefficient directeur le nombre : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Définition

Une fonction définie sur un intervalle ouvert I, $a \in$ I, est dérivable en a si :

1. $f(a)$ existe.
2. La limite de $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ quand h tend vers 0 existe et est finie.

1.2 Exemple :

La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0.

$f(0) = \sqrt{0} = 0$ et $\dfrac{f(h)-f(0)}{h} = \dfrac{\sqrt{h}}{h} = \dfrac{1}{\sqrt{h}}$ et $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$.

1.3 Nombre dérivé d'une fonction en a

Définition

1. Si $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = l$ avec l fini alors l est le nombre dérivé de f en a. Ce nombre représente le coefficient directeur de la tangente à (C_f) au point d'abscisse a.
2. Si $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = +\infty$ ou $-\infty$ alors le nombre dérivé de f en a n'existe pas. Cependant la courbe représentant f admet une tangente verticale au point d'abscisse a.

2 Fonction dérivée

2.1 définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On note f' la fonction qui à tout x associe le nombre dérivé de f en x.

2.2 Equation de la tangente

Propriété

Si $f'(a)$ existe alors la courbe (C_f) admet au point d'abscisse a, une tangente (T) d'équation

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

.

2.3 Dérivées de fonctions usuelles

	D_f	$f(x)$	$D_{f'}$	$f'(x)$
1 °	$\mathbb{R}$	k (constante réelle)	$\mathbb{R}$	0
2 °	$\mathbb{R}$	x	$\mathbb{R}$	1
3 °	$\mathbb{R}$	x^2	$\mathbb{R}$	$2x$
4 °	$\mathbb{R}$	x^n	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
5 °	$]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$	$\frac{1}{x}$	$]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$	$-\frac{1}{x^2}$
6 °	$]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$	$\frac{1}{x^2}$	$]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$	$-\frac{2}{x^3}$
7 °	$]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$	$\frac{1}{x^n}$ ou x^{-n} $\quad n \geqslant 1$	$]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$	$\frac{-n}{x^{n+1}}$ ou $-nx^{-n-1}$
8 °	$[0;+\infty[$	$\sqrt{x}$	$]0;+\infty[$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

2.4 Dérivées et opérations

k constante et u et v deux fonctions de x dérivables.

1. $(u+v)'(x) = u'(x) + v'(x)$
2. $(ku)'(x) = ku'(x)$
3. $(u \times v)'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$
4. Cas particulier : $(u^2)'(x) = 2 \times u'(x) \times u(x)$
5. $(u^n)'(x) = n \times u'(x) \times u^{n-1}(x)$
6. $\left(\dfrac{k}{v}\right)'(x) = \dfrac{-k \times v'(x)}{(v(x))^2}$
7. $\left(\dfrac{u}{v}\right)'(x) = \dfrac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{(v(x))^2}$
8. $(\sqrt{u})'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
9. $(v \circ u)'(x) = v'(u(x)) \times u'(x)$

Exemples :

$f(x) = \sqrt{x^2+4x+1}$. Il s'agit de déterminer $f'(x)$.
$f(x)$ se présente sous la forme $\sqrt{(u(x))}$ avec $u(x) = x^2+4x+1$ et $u'(x) = 2x+4$.
Donc $f'(x) = \dfrac{2x+4}{2\sqrt{x^2+4x+1}} = \dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+1}}$.

page 2 page 2

Théorème

1. Les polynômes sont dérivables sur $\mathbb{R}$.
2. Les fonctions rationnelles sont dérivables sur le domaine de définition de la fonction.
3. Les fonctions de la forme $\sqrt{u(x)}$ sont dérivables sur tout intervalle où $u(x) > 0$.

3 Fonctions continues

3.1 Définition de la continuité :

Définition

Soit f est une fonction définie sur un intervalle I et soit a est un réel de I.
f est continue en a signifie que f admet une limite en a égale à $f(a)$.
f est continue sur l'intervalle I signifie que f est continue en chaque point a de I.

Exemple : Soit f la fonction définie sur $I =]1; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{x-1}$.
La fonction f est continue en 2 car : $f(2) = 1$ et $\lim_{x \to 2} f(x) = 1$.
Plus généralement, cette fonction est continue sur I.

3.1.1 Illustration graphique :

De manière intuitive, on reconnaît graphiquement qu'une fonction est continue lorsque sa courbe peut être tracée sans lever le crayon. (attention, cela ne constitue pas une preuve !)

Exemple : la fonction carré est continue :
En effet, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \to a} x^2 = a^2$; on peut donc tracer la parabole sans lever le crayon.

Existe-t-il des fonctions non continues ? Oui, il suffit de tracer une courbe avec une rupture dans le tracé ; la fonction associée n'est alors pas continue.

3.2 Exemple d'une fonction explicite non continue : la fonction « Partie entière »

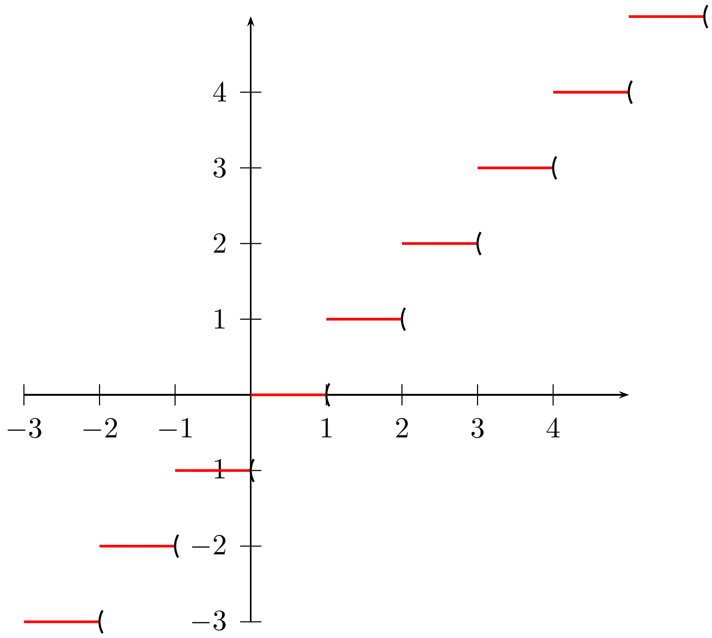
Définition

Soit x un réel. Il existe alors un entier relatif n unique tel que : $n \leq x < n+1$. On définit alors la fonction partie entière, notée E, par : $E(x) = n$.

Exemples : $E(2,3) = 2$;$E(3) = 3$; $E(-4,12) = -5$ (**attention aux nombres négatifs**).

Remarque : Cette fonction est constante sur chaque intervalle de la forme $[n; n+1[$.

Représentation graphique :



Sur $[n\ ;\ n+1[$, $E(x)=x$.

$\lim\limits_{\substack{x \to n \\ x>n}} E(x) = n$ puisque $E(x)=n$ sur $[n\ ;\ n+1[$

$\lim\limits_{\substack{x \to n \\ x<n}} E(x) = n-1$ puisque $E(x)=n-1$ sur $[n-1\ ;\ n[$

$E(n)=n$.

On n'a donc pas $\lim\limits_{x \to n} E(x) = E(n)$: E n'est pas continue en n pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

En fait, E est continue à droite, mais pas à gauche.

Exemple de fonction discontinue partout (hors-programme !)

La fonction f définie par : $\left\{ \begin{array}{l} f(x)=0 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ f((x)=1 \text{ si } x \notin \mathbb{Q} \end{array} \right.$ est discontinue en tout réel a de $\mathbb{R}$.

Cela vient de la structure des réels. Pour chaque nombre rationnel (pouvant d'écrire comme quotient d'entiers), on peut toujours trouver un irrationnel aussi proche que l'on veut de ce rationnel et on peut approcher aussi près que l'on veut un irrationnel par un rationnel

3.3 Différents types de discontinuité

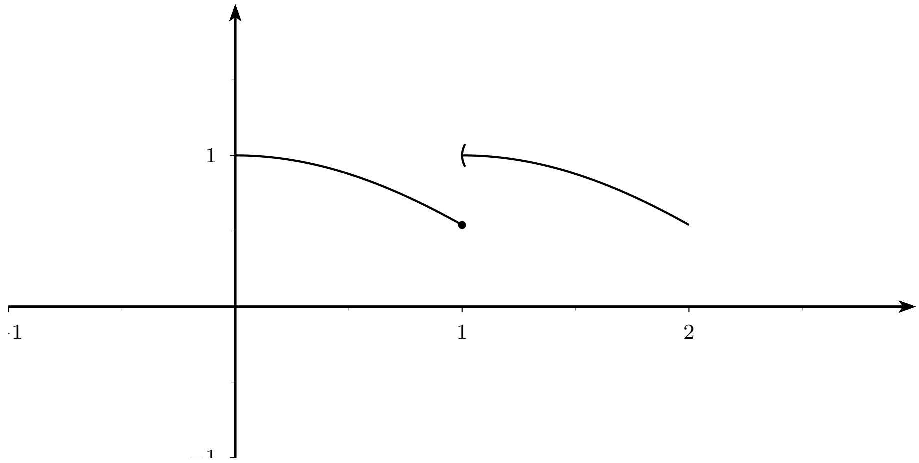
Y a-t-il différents types de discontinuité ? Oui !

Une fonction f est continue en a si, et seulement si, elle a une limite à gauche et une limite à droite en a et que ces deux limites sont égales à $f(a)$.

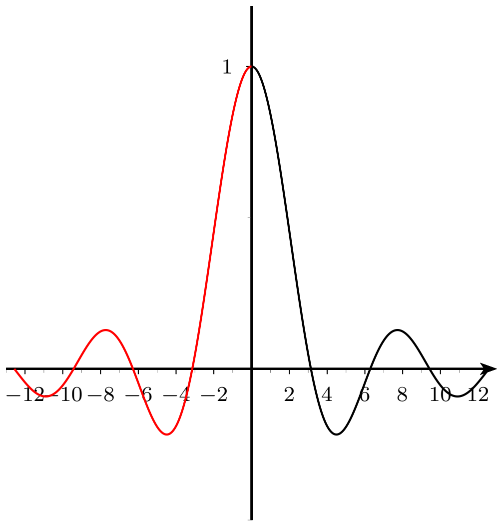
Elle peut donc être discontinue en a pour plusieurs raisons.

- **Première raison possible :** f admet une limite à gauche et à droite en a, mais ces deux limites ne sont pas égales.

  Exemple : Soit f définie par : $f(x) = \left\{ \begin{array}{l} \cos(x) \text{ sur } [0\ ;\ 1] \\ \cos(x-1) \text{ sur } [1\ ;\ 2] \end{array} \right.$.



- **Deuxième raison possible :**



f admet une limite commune à gauche et à droite en a, mais f n'est pas définie en a ou admet une autre valeur que la limite commune. C'est le cas par exemple de la fonction sinus amorti, très importante en physique, définie par :

$$f \ : \ x \mapsto \frac{\sin x}{x} \quad \text{pour tout } x \neq 0$$

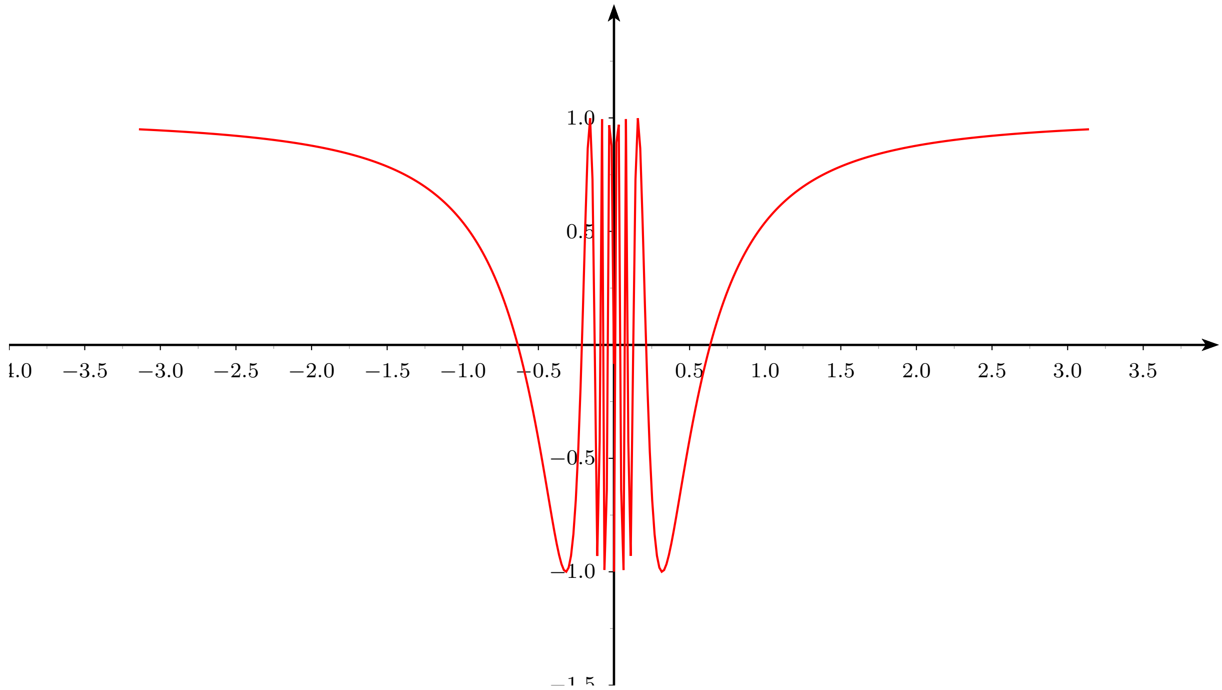
Bien que cette fonction ne soit pas définie en 0, cela « ne se voit pas » graphiquement.
En effet, pour $x \neq 0$, on peut écrire $\dfrac{\sin(x)}{x} = \dfrac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0}$, qui tend vers $\sin'(0)$ quand x tend vers 0, c'est-à-dire vers $\cos(0) = 1$.
Par conséquent : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$.
On peut alors **prolonger f par continuité** en définissant une fonction g sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \begin{cases} f(x) \text{ pour } x \neq 0 \\ 1 \text{ pour } x = 0 \end{cases}$$

On obtient ainsi une fonction g **définie et continue** sur $\mathbb{R}$.

- **Troisième raison possible**, et les choses deviennent compliquées : f n'a pas de limite à droite ou à gauche en a. Il faut bien avouer que dans la pratique, presque toutes les fonctions ont une limite à gauche et à droite. Mais il faut avoir vu ces contre-exemples une fois dans sa vie, pour bien comprendre la théorie et pour être sûr de donner des définitions cohérentes, comme celui de la fonction f définie par

$$f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{pour tout } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 0$$



3.4 Dérivabilité implique continuité :

Théorème important

Si f est dérivable en a alors f est continue en a.

Remarque : La réciproque de la propriété est fausse. En effet, la fonction $x \mapsto |x|$ est continue en 0 mais f n'est pas dérivable en 0.

Conséquence : Continuité des fonctions usuelles !!!

Théorème

Les fonctions polynômes, la fonction sinus, la fonction cosinus sont continues sur $\mathbb{R}$. La fonction racine carrée est continue sur $[0; +\infty[$.

3.5 Continuité des fonctions usuelles :

Théorème

La somme, le produit, le quotient et la composée de deux fonctions continues est une fonction continue sur leur ensemble de définition.

Démonstration : Cela vient des propriétés sur les calculs de limites (voir chapitre sur les limites)

Exercice : f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x$ si $x \leq 0$, $f(x) = x^2$ si $0 < x < 1$, $f(x) = m$ si $x \geq 1$.

1. $m = 2$. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
2. Pour quelle valeur de m la fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

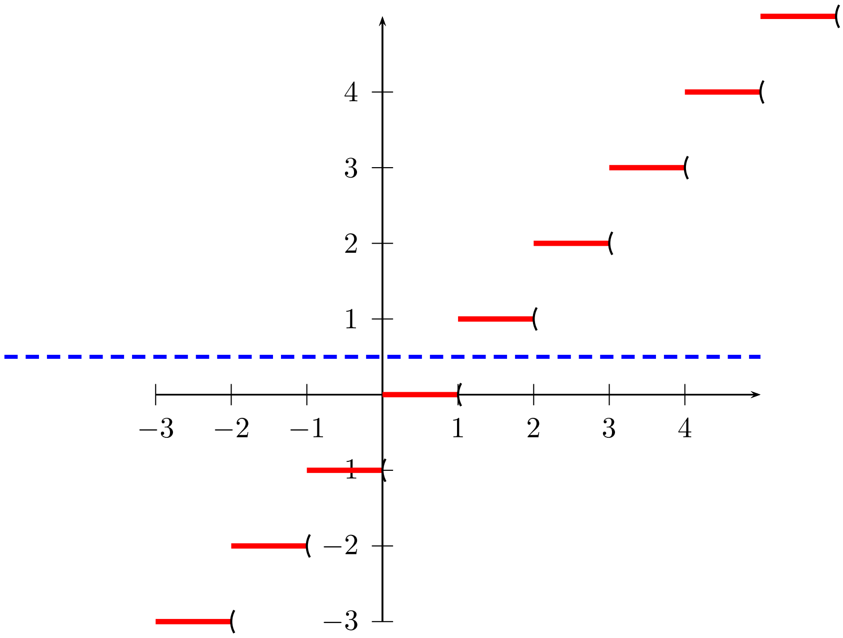
4 Le théorème des valeurs intermédiaires :

4.1 Théorème

Approche :

Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-3; 3]$. Soit k un nombre compris entre $f(-3)$ et $f(3)$.
Existe-t-il un nombre x tel que $f(x) = k$?

- **Cas d'une fonction non continue.**
  Par exemple, reprenons le cas de la fonction partie entière, définie sur $\mathbb{R}$.
  Considérons l'équation $f(x) = 0,5$.
  Il est clair graphiquement que l'équation n'a pas de solution.



- **Cas d'une fonction continue.**
  Comme la courbe se trace sans lever le crayon, il semble intuitivement que l'équation $f(x) = k$ ait au moins une solution

Théorème des valeurs intermédiaires (admis)

f est une fonction **continue** définie sur un intervalle I.
Soient a et b deux réels de I.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe **au moins** un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.

Remarque : c'est un **théorème d'existence**; il ne donne pas la valeur d'un solution. D'ailleurs, la plupart du temps, on se sert de ce théorème pour montrer l'existence d'une solution qu'on ne sait pas trouver de façon explicite.

Interprétation graphique :

Si $(\mathcal{C})$ est la courbe représentative de f continue sur $[a;b]$, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, la droite d'équation $y=k$ coupe au moins une fois la courbe $(\mathcal{C})$ en un point d'abscisse c comprise entre a et b.

Interprétation en terme d'équation :
f est une fonction continue sur un intervalle I comprenant a et b. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x)=k$ admet **au moins** une solution c comprise entre a et b.

Exercice : Soit (E) l'équation : $\cos(2x)=2\sin x-2$.
Démontrer que (E) admet au moins une solution dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]$.

Solution : L'équation s'écrit : $f(x)=-2$ avec $f(x)=\cos(2x)-2\sin(x)$. f est continue. -2 est compris entre $f\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ et $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Autres exercices :

1. Soit f une fonction continue sur un intervalle I. a et b sont des réels de I tels que $f(a)f(b)<0$. Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution comprise entre a et b.
2. Démontrer que l'équation $x^3+4x^2+4x+2=0$ admet au moins une solution comprise entre -3 et -1.
   On pose $f(x)=x^3+4x^2+4x+2$; $f(-3)=-1<0$; $f(-1)=1>0$; f est continue, donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[-3\ ;\ -1]$.
   Pour savoir le nombre exact de solutions de l'équation $f(x)=0$, il faut étudier les variations de f.
3. Montrer qu'un polynôme de degré impair a au moins une racine réelle.
4. Un randonneur parcourt 10 km en deux heures exactement. Montrer qu'il y a un intervalle de temps de durée une heure exactement durant lequel il parcourt exactement 5 km.
   On note $d(t)$ le temps parcouru au bout de t heures ($0\leqslant t\leqslant 2$) et on considère la fonction $u\ :\ t\mapsto d(t+1)-d(t)$.

   Solution :
   $u(0)=d(1)$ et $u(1)=d(2)-d(1)$.
   - Si $u(1)=5$, l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ convient.
   - Si $u(1)<5$, alors $u(0)<5$ et $u(1)>5$; comme u est continue, l'équation $u(t)=5$ a une solution.
   - Si $u(1)>5$, alors $u(0)>5$ et $u(1)<5$; comme u est continue, l'équation $u(t)=5$ a une solution.

4.2 Cas des fonctions continues strictement monotones :

Théorème

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur $[a;b]$, alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x)=k$ admet une solution unique.

Démonstration :

L'existence d'une solution vient du théorème des valeurs intermédiaires.
L'unicité vient de la stricte monotonie.

Remarque : Tableaux de variations :

Par convention, les flèches obliques d'un tableau de variation traduisent la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur l'intervalle considéré.

4.3 Approximation des solutions d'une équation du type $f(x)=k$

- méthode du balayage
- dichotomie : on coupe l'intervalle en deux à chaque étape.
- utilisation de la fonction Solve de la calculatrice

5 Suites définies par récurrence

Théorème

Soit (u_n) une suite définie par u_0 et $u_{n+1}=f(u_n)$. Si (u_n) converge vers ℓ et si f est continue, alors $f(\ell)=\ell$.

Démonstration :

- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\ell$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}=\ell$, c'est-à-dire $\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(u_n\right)=\ell$.
- Comme f est continue, puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\ell$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(u_n\right)=f\left(\ell\right)$.
- La limite d'une suite est unique, donc $\ell=f\left(\ell\right)$.(**Vue dans le chapitre sur les suites**)

Exercice :

Soit la suite (u_n) définie par $\left\{\begin{array}{l} u_0=3 \\ u_{n+1}=\dfrac{1}{4}\times u_n+2 \end{array}\right.$

1. Montrer que la suite u est décroissante et bornée par 1 et 3.
2. En déduire que la suite u converge.
3. Déterminer sa limite.